УДК 517.9

СИММЕТРИЗАЦИЯ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕС-КИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

©Б. В. Базалий, А. Ф. Тедеев

1. Наряду с хорошо известными методами Де-Джорджи и Мозера метод симметризации по Шварцу дает возможность получить оценки решений в равномерной метрике различных краевых задач для эллиптических уравнений. За последние 20 лет в этом направлении получено ряд интересных результатов. Отметим некоторые из них. В работах [1,2] предложена схема получения точных оценок L_p - норм, $1 \leq p \leq \infty$, решений линейных эллиптических краевых задач при минимальных требованиях на данные задачи. Аналогичный подход был использован и для квазилинейного случая в работах [3,4]. Исследование подобных вопросов для параболических уравнений связано с рядом принципиальных трудностей, одной из которых является тот факт, что симметризация рассматривается относительно лишь пространственных переменных, а временная переменная играет роль параметра. В работе [5] идеи симметризации применены к задаче Коши с использованием теории полугрупп. В [3] использован метод Роте, причем существенным является линейность задачи. В статье [6] предложен прямой подход к симметризации линейных параболических краевых задач. В данной работе мы развиваем этот подход к исследованию широких классов нелинейных краевых задач. Лишь ради простоты изложения мы будем рассматривать в основном модельные уравнения.

2. Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, - ограниченная достаточно гладкая область. В $D_T = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнения вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + |u|^{r-1}u, \;\; p > 1, \;\; r \geq 1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta\left(|v|^{m-1}v\right) + |v|^{r-1}v, \;\; m \geq 1, \;\; r \geq 1. \qquad (2)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \;\; u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in \Omega, \qquad (3)$$

$$v|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \;\; v(x,0) = v_0(x), \;\; x \in \Omega. \qquad (4)$$

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов этого пункта, приведем необходимые определения. Для любой измеримой в Ω функции $v(x)$ введем функцию распределения

$$\mu(s) = |\{x \in \Omega : |v(x)| > s\} \; \forall s \in [0,\infty), \;\; |\Omega| = \operatorname{mes}_n \Omega.$$

Определим невозрастающую перестановку функции $v(x)$ следующим образом:

$$v^*(\theta) = \inf\{s : \mu(s) < \theta\}.$$

Сферической симметризацией по Шварцу функции $v(x)$ называется функция

$$v^{\#}(x) = v^*(C_n\,|x|^n),\ \ x \in \Omega^{\#},$$

где $\Omega^{\#}$ - шар в R^n с центром в нуле радиуса R, определяемого из равенства $|\Omega| = C_n\,R^n$, C_n - обьем единичного шара в R^n. Если функция v определена в D_T и измерима относительно прострнственных переменных, то можно рассматривать перестановки функции $v(x,t)$ только относительно пространственных переменных:

$$\mu(s,t) = |\{x \in \Omega : |v(x,t)| > s\}|,\ \ v^*(\theta,t) = \inf\{s : \mu(\cdot,t) < \theta\}$$

$v^{\#}(x,t) = v^*(C_n|x|^n, t)$.

Обобщенным решением задачи (1), (3) в D_T назовем функцию $u(x,t)$ из класса $C([0,T) : L_2(\Omega)) \bigcap L_p((0,T) : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)) \bigcap L_\infty(D_T)$, удовлетворяющую (1), (3) в смысле интегрального тождества. При этом предполагаем, что $u_0 \in L_\infty(\Omega) \bigcap W^1_q(\Omega)$, $g = \max(2,p)$.

Аналогично обобщенным решением задачи (2), (4) будем называть функцию $v(x,t)$ из класса $V\ :\ v \in C([0,T); L_2(\Omega)) \bigcap L_\infty(D_T)$, $|v|^{m-1}v \in L_2((0,T); \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, удовлетворяющую (2), (4) в смысле интегрального тождества. При этом считаем, что $v_0(x) \in L_\infty(\Omega)$.

Задачам (1), (3) и (2), (4) сопоставим соответствующие симметризованные задачи:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t - \operatorname{div}(|\nabla \mathcal{U}|^{p-2}\,\nabla \mathcal{U}) = \mathcal{U}^r \quad \text{в} \quad \Omega^{\#} \times [0,T), \\ \mathcal{U}|_{\partial\Omega^{\#}\times(0,T)} = 0,\ \mathcal{U}(x,0) = u_0^{\#}(x),\ \ x \in \Omega^{\#}. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_t - \Delta \mathcal{V}^m = v^r \quad \text{в} \quad \Omega^{\#} \times (0,T), \\ \mathcal{V}|_{\partial\Omega^{\#}\times(0,T)} = 0,\ \ \mathcal{V}(x,0) = v_0^{\#}(x),\ \ x \in \Omega^{\#}. \end{cases} \tag{6}$$

Связь между решениями задач (1), (3) и (2), (4) и (5) и (6) соответственно описываются следующим утверждением [8].

Теорема 1. *Пусть задачи (5) и (6) имеют сферически симметричные убывающие решения $U(x,t)$ и $v(x,t)$ соответственно. Тогда $\forall\, t \in (0,T)$ для решений задач (1), (3) и (2), (4) в D_T имеют место оценки:*

$$\operatorname*{ess\ sup}_{\Omega} |u(x,t)| = u^*(0,t) \le \operatorname*{ess\ sup}_{0\le s<|\Omega|} \mathcal{U}^*(s,t) = \mathcal{U}^*(0,t), \tag{7}$$

$$\operatorname*{ess\ sup}_{\Omega} |v(x,t)| = v^*(0,t) \le \operatorname*{ess\ sup}_{0\le s<|\Omega|} \mathcal{V}^*(s,t) = \mathcal{V}^*(0,t). \tag{8}$$

3. Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \ge 2$, - область с некомпактной достаточно гладкой границей. Рассмотрим в $D = \Omega \times \{t > 0\}$ следующую задачу

$$u_t = \Delta u^m, \quad m \ge 1, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u^m}{\partial \nu}|_{\partial\Omega\times\{t>0\}} = 0, \tag{10}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial \nu}$ - производная по внешней к Ω нормали. Будем предполагать в дальнейшем, что $u_0(x) \ge 0$ и $u_0(x) \in L_1(\Omega) \bigcap L_\infty(\Omega) \bigcap W^1_2(\Omega)$. Под обобщенным решением задачи (9)-(11) в D_T понимается неотрицательная функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $L_1(D_T) \bigcap L_\infty(D_T)$, имеющая конечный интеграл

$$\int_0^T \int_\Omega u^{m-1} |\nabla u|^2 dx\, dt$$

и удовлетворяющая $\forall \eta \in C^\infty(D_T)$, $\eta(x,T) = 0$, следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega (-u\eta_t + \nabla u^m \nabla \eta) dx\, dt = \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0) dx. \qquad (12)$$

Функция $u(x,t)$ - решение задачи (9)-(11) в D, если она является обобщенным решением той же задачи в D_T $\forall T > 0$.

Введем еще некоторые классы областей с некомпактной границей. Рассмотрим функцию обьема $l(v)$ [7]

$$l(v) = \inf_{\substack{Q \subset \Omega \\ \mathrm{mes}_n Q = v}} \mathrm{mes}_{n-1}(\partial Q \cap \Omega).$$

Пусть положительная непрерывная функция $g(v)$, $v > 0$, такова, что функция $v^{(n-1)/n}/g(v)$ монотонно не убывает. Следуя [7], будем говорить, что $\Omega \in B(g)$, если $\forall v > 0$

$$l(v) \geq g(v).$$

В класс $B(g)$ попадают области и несужающиеся на бесконечности и для которых, например, выполнено условие

$$l(v) \geq c \min\{v^{\frac{n-1}{n}}, v^{1-\alpha_0}\}, \frac{1}{n} \leq \alpha_0 \leq 1, v \in (0,\infty). \qquad (13)$$

Рассмотрим теперь в $\Omega^* \times \{t > 0\} \equiv (0,\infty) \times (0,\infty)$,

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\left(g^2(s)\,(\mathcal{U}^m)_s\right) = 0, \qquad (14)$$

$$\mathcal{U}(\infty, t) = 0, \quad (g^2(s)\,(\mathcal{U}^m)_s)(0,t) = 0, \qquad (15)$$

$$\mathcal{U}(0,t) = u_0^*(s), \quad s \in (0,\infty). \qquad (16)$$

Справедлива следующая [9]

Теорема 2. *Пусть $\Omega \in B(g)$ и $u(x,t)$ - решение задачи (9)-(11) в D. Тогда для п.в. $t > 0$ имеет место оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u(x,t) = u^*(0,t) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{0<s<\infty} \mathcal{U}(s,t) = \mathcal{U}(0,t). \qquad (17)$$

где $\mathcal{U}(s,t)$ -решение задачи (14)-(16).

Таким образом, в силу теоремы 2 для оценки $||u(x,t)||_{L_\infty(\Omega)}$ достаточно оценить $||\mathcal{U}(\cdot,t)||_{L_\infty(0,\infty)}$.

Обозначим

$$I(\theta) = \int_0^\theta \frac{v^m}{g^2(v)} dv.$$

Предположим, что существует такое $\kappa > 0$, что функция $(I_{-1}(\theta))^{-1}\theta^\kappa$ монотонно не убывает $\forall \theta > 0$, где $I_{-1}(\theta)$ - обратная к $I(s)$ функция. Это свойство будем называть условием в). Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $\Omega \in B(g)$ и выполнено условие в). Тогда для решения $u(x,t)$ задачи (9)-(11) в D для п.в. $t > 0$ справедлива следующая оценка*

$$||u(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)} = u^*(0,t) \le \mathcal{U}(0,t) = ||\mathcal{U}(\cdot,t)||_{L_\infty(0,\infty)} \le C\,(I_{-1}(ct))^{-1}. \quad (18)$$

Рассмотрим пример.

Пусть $g(v) = c\min\{v^{1-\frac{1}{n}}, v^{1-\alpha}\}$, $\frac{1}{n} \le \alpha < 1$.

Тогда

$$I(\theta) = C\max\{\theta^{\frac{2}{n}+m-1}, \theta^{2\alpha+m-1}\},$$

$$I_{-1}(\theta) = C\max\{\theta^{\frac{n}{n(m-1)+2}}, \theta^{\frac{1}{2\alpha+m-1}}\},$$

Значит, выполнено условие в) с $\kappa = \frac{n}{n(m-1)+2}$ и оценка (18) примет следующий вид

$$||u(\cdot,t)||_{L_\infty(\theta)} \le C\max\{t^{-\frac{n}{n(m-1)+2}}, t^{-\frac{1}{m-1+2\alpha}}\}.$$

Отметим, что случаю $\alpha = \frac{1}{n}$ соответствуют области, которые расширяются как все пространство, например, конус, и тогда скорость стабилизации такая же, как в случае задачи Коши в R^n. Если же $\alpha = 1$, то Ω -область цилиндрического типа и тогда решение стремится к нулю при $t \to \infty$ как решение одномерной задачи Коши. Таким образом, число $\frac{1}{m-1+2\alpha}$ - является числом Баренблатовского типа, а показатель α характеризует геометрию области.

4. Приведем набросок доказательства теоремы 2. Для доказательства рассмотрим регуляризованную задачу в D_T:

$$u_{\varepsilon t} = \Delta\left((u_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\,u_\varepsilon\right) \ \text{ в } \ D_T,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left((u_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\,u_\varepsilon\right)\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0,$$

$$u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x),\ x \in \Omega,\ u_{0\varepsilon} \to u_0 \ \text{ в } \ W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega).$$

Из интегрального тождества стандартным путем [1] получаем

$$-\frac{d}{d\theta}\int_{\{u_\varepsilon>\theta\}} \nabla\left((u_\varepsilon^2+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\,u_\varepsilon\right)\nabla u_\varepsilon\,dx = -\int_{\{u_\varepsilon>\theta\}} u_{\varepsilon t}\,dx \quad (19)$$

Согласно формуле Флеминга-Ришеля

$$\int_{\{u_\varepsilon>\theta\}} |\nabla u_\varepsilon|\,dx = \int_\theta^\infty P\{x : u_\varepsilon(x,t) \ge \xi\}\,d\xi,$$

где P - периметр многообразия $\{u_\varepsilon \ge \xi\}$. С другой стороны

$$P\{x : u_\varepsilon(x,t) > \theta\} \ge g(\mu_\varepsilon(\theta,t)).$$

Значит,

$$-\frac{d}{d\theta}\int_{\{u_\varepsilon>\theta\}} |\nabla u_\varepsilon|\,dx \ge g(\mu_\varepsilon(\theta,t)). \quad (20)$$

В силу неравенства Гельдера

$$\frac{1}{h}\int_{\{\theta<u_\varepsilon\leq\theta+h\}}|\nabla u_\varepsilon|\,dx \leq$$

$$\leq \Big(\frac{1}{h}\int_{\{\theta<u_\varepsilon\leq\theta+h\}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \times \Big(\frac{1}{h}\,\mathrm{mes}\,s_n\,\{\theta<u_\varepsilon\leq\theta+h\}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Устремляя в этом неравенстве h к нулю, с учетом (20) получаем

$$g(\mu_\varepsilon(\theta,t)) \leq \Big(-\frac{d}{d\theta}\int_{\{u_\varepsilon\geq\theta\}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}(-\mu'_\varepsilon(\theta,t))^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Из (19) находим, что

$$(m\theta^2+\varepsilon)(\theta^2+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}-1}\Big(-\frac{d}{d\theta}\int_{\{u_\varepsilon>\theta\}}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\Big) \leq -\int_{\{u_\varepsilon>\theta\}}u_{\varepsilon t}\,dx. \tag{22}$$

Далее, пользуясь равенством [6]

$$\int_{\{u_\varepsilon>\theta\}}u_{\varepsilon t}\,dx = \int_0^{\mu_\varepsilon(\theta,t)}u^*_{\varepsilon t}\,ds,$$

из (21) и (22) получаем

$$(m\theta^2+\varepsilon)(\theta^2+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}-1}g^2(\mu_\varepsilon(\theta,t))(-\mu'_\varepsilon(\theta,t))^{-1} \leq -\int_0^{\mu_\varepsilon(\theta,t)}u^*_{\varepsilon t}\,ds. \tag{23}$$

Сделаем замену переменных $\mu_\varepsilon(\theta,t)=s$, тогда $\theta=u^*_\varepsilon(s,t)$ и (23) перепишется в виде

$$-[((u^*_\varepsilon)^2+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\,u^*_\varepsilon]_s\,g^2(s) \leq -\int_0^s u^*_{\varepsilon t}(\sigma,t)\,d\sigma. \tag{24}$$

Обозначая

$$k(s,t)=\int_0^s u^*_\varepsilon(\sigma,t)\,d\sigma,$$

перепишем (24) в следующем виде

$$k_t - g^2(s)\,[(k_s^2+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\,k_s]_s \leq 0. \tag{(25)}$$

Очевидно, что

$$k(0,t)=k_s(\infty,t)=0. \tag{26}$$

Пусть

$$K(s,t)=\int_0^s \mathcal{U}_\varepsilon(\sigma,t)\,d\sigma,$$

где $\mathcal{U}_\varepsilon(\sigma,t)$ - решение следующей задачи

$$\frac{\partial\mathcal{U}_\varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}\big(g^2(s)\,((\mathcal{U}_\varepsilon^2+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\mathcal{U}_\varepsilon)_s\big)=0, \tag{27}$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\infty,t)=0,\ \ (g^2(s)\,((\mathcal{U}_\varepsilon^2+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\mathcal{U}_\varepsilon)_s)(0,t)=0, \tag{28}$$

$$U_\varepsilon(s,0) = u^*_{0\varepsilon}(s), \ \ s \in (0,\infty).$$

Интегрируя (27) в пределах от нуля до s, получим

$$\frac{\partial K}{\partial t} - g^2(s)((K_s^2+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}} K_s)_s = 0. \tag{29}$$

Очевидно, что

$$K(0,t) = K_s(\infty,t) = 0, \ \ K(s,0) = \int_0^s u^*_{\varepsilon 0}(\sigma)\, d\sigma. \tag{30}$$

По теореме сравнения получим

$$k(s,t) \le K(s,t), \ \ 0 \le s < \infty, \ \ 0 < t < \infty.$$

Следовательно,

$$\int_0^s u^*_\varepsilon(\sigma,t)\, d\sigma \le \int_0^s U_\varepsilon(\sigma,t)\, d\sigma.$$

и, значит,

$$\int_0^s (u^*_\varepsilon(\sigma,t))^p\, d\sigma \le \int_0^s U^p_\varepsilon(\sigma,t)\, d\sigma, \ \ 0 < s \le \infty \ \ \forall p \ge 1.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $s = \infty$, получим требуемую оценку.

В заключение отметим, что результаты второго пункта были опубликованы в [8], а результаты пункта 3 в [9]. Аналог теоремы 3 был получен в работе [10] другим методом.

1. *Talenti G.*, Elliptic equations and rearrangement // Ann.Scuola norm.super.Piza.Sci.fis e mat. – 1976. –**4**, N 3. – P. 697–718.
2. *Talenti G.*, Lineaar Elliptic P.D.E'.s: Level sets,rearrangements and a priori estimates of solutions // Boll. Unione mat. ital. – 1985. – **4B**, N 3. – P. 917–949.
3. *Alvino A., Trombetti G., Lions P.L.*, Comporison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization // Ann. Inst. H. Poincare. – 1990. – **7**, N 2. – P. 37–65.
4. *Giarruso E.*, Su una classe di equazioni non lineari ellipticbe // Ric. mat. – 1982. – **31**, N 2. – P. 245–257.
5. *Vasquez J.*, Symmetrization in nonlinear parabolic equations // Port. math. – 1982. – **41**, N 1-4. – P. 339–346.
6. *Mossino J. Rakotoson J.*, Isoperimetric inequalities in parabolic equations // Ann. Scuola norm. super Piza Sci. fis. e mat. – 1986. – **13**, N 1. – P. 51–73.
7. *Гущин А.К.* , Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Труды Мат. ин-т АН СССР. – 1973. – **126**. *P. 5–45*.
8. *Базалий Б.В., Тедеев А.Ф.* , Симметризация и начально-краевые задачи для некоторых классов нелинейных параболических уравнений второго порядка // УМЖ. – 1993. – **47**. *N 7*. – С. 884–892.
9. *Базалий Б.В., Тедеев А.Ф.* , Метод симметризации и оценки решений задачи Неймана при неограниченном возрастании времени для уравнения пористой среды в областях с некомпактной границей // УМЖ. – 1994.
10. *Тедеев А.Ф.* , Оценки скорости стабилизации второй смешанной задачи для квазилинейно- го параболического уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 1991. – **27**. *N 10*. – С. 1795–1806.